

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие	13
1. Основные определения и формулы. Интегральные преобразования	14
1.1. Некоторые определения, замечания и формулы	14
1.1-1. Некоторые определения	14
1.1-2. Структура решений линейных интегральных уравнений	15
1.1-3. Интегральные преобразования	16
1.1-4. Вычеты. Формулы для вычислений	16
1.1-5. Лемма Жордана	18
1.2. Преобразование Лапласа	18
1.2-1. Определение. Формула обращения	18
1.2-2. Обращение рациональных функций	19
1.2-3. Представление оригиналов в виде ряда	19
1.2-4. Теорема о свертке для преобразования Лапласа	19
1.2-5. Пределочные теоремы	20
1.2-6. Основные свойства преобразования Лапласа	20
1.2-7. Формула Поста–Уиддера	20
1.3. Преобразование Меллина	21
1.3-1. Определение. Формула обращения	21
1.3-2. Основные свойства преобразования Меллина	22
1.3-3. Связь преобразований Меллина, Лапласа и Фурье	22
1.4. Преобразование Фурье	22
1.4-1. Определение. Формула обращения	22
1.4-2. Несимметрическая форма преобразования	23
1.4-3. Альтернативное преобразование Фурье	23
1.4-4. Теорема о свертке для преобразования Фурье	24
1.5. Синус- и косинус-преобразования Фурье	24
1.5-1. Косинус-преобразование Фурье	24
1.5-2. Синус-преобразование Фурье	25
1.6. Другие интегральные преобразования	25
1.6-1. Преобразование Ханкеля	25
1.6-2. Преобразование Мейера	26
1.6-3. Преобразование Конторовича–Лебедева	26
1.6-4. Y -преобразование и другие преобразования	26
2. Методы решения линейных уравнений вида $\int_a^x K(x,t)y(t) dt = f(x)$	28
2.1. Уравнения Вольтерра первого рода	28
2.1-1. Структура уравнений. Классы функций и ядер	28
2.1-2. Существование и единственность решения	29
2.2. Уравнения с вырожденным ядром: $K(x,t) = g_1(x)h_1(t) + \dots + g_n(x)h_n(t)$	29
2.2-1. Уравнения с ядром $K(x,t) = g_1(x)h_1(t) + g_2(x)h_2(t)$	29
2.2-2. Уравнения с вырожденным ядром общего вида	30

2.3. Сведение уравнений Вольтерра первого рода к уравнениям Вольтерра второго рода	31
2.3-1. Первый способ	31
2.3-2. Второй способ	31
2.4. Уравнения с разностным ядром: $K(x, t) = K(x - t)$	32
2.4-1. Метод решения, основанный на преобразовании Лапласа	32
2.4-2. Случай рационального образа решения	32
2.4-3. Представление решения в виде композиции	33
2.4-4. Использование вспомогательного уравнения	34
2.4-5. Сведение к обыкновенным дифференциальным уравнениям	34
2.4-6. Связь уравнений Вольтерра и Винера–Хопфа	35
2.5. Метод дробного дифференцирования	35
2.5-1. Определение дробных интегралов	35
2.5-2. Определение дробных производных	36
2.5-3. Основные свойства	37
2.5-4. Решение обобщенного уравнения Абеля	38
2.6. Уравнения с ядрами, имеющими слабую особенность	38
2.6-1. Метод преобразования ядра	38
2.6-2. Ядро с логарифмической особенностью	39
2.7. Метод квадратур	40
2.7-1. Квадратурные формулы	40
2.7-2. Общая схема метода	41
2.7-3. Алгоритм на основе формулы трапеций	42
2.7-4. Алгоритм для уравнения с вырожденным ядром	43
2.8. Уравнения с бесконечным пределом интегрирования	43
2.8-1. Уравнение с переменным нижним пределом интегрирования	43
2.8-2. Приведение к уравнению Винера–Хопфа первого рода	44
3. Методы решения линейных уравнений вида	
$y(x) - \int_a^x K(x, t)y(t) dt = f(x)$	45
3.1. Интегральные уравнения Вольтерра второго рода	45
3.1-1. Предварительные замечания. Уравнения для резольвенты	45
3.1-2. Связь между решениями интегральных уравнений	46
3.2. Уравнения с вырожденным ядром: $K(x, t) = g_1(x)h_1(t) + \dots + g_n(x)h_n(t)$	46
3.2-1. Уравнения с ядром $K(x, t) = \varphi(x) + \psi(x)(x - t)$	46
3.2-2. Уравнения с ядром $K(x, t) = \varphi(t) + \psi(t)(t - x)$	47
3.2-3. Уравнения с ядром $K(x, t) = \sum_{m=1}^n \varphi_m(x)(x - t)^{m-1}$	48
3.2-4. Уравнения с ядром $K(x, t) = \sum_{m=1}^n \varphi_m(t)(t - x)^{m-1}$	48
3.2-5. Уравнения с вырожденным ядром общего вида	49
3.3. Уравнения с разностным ядром: $K(x, t) = K(x - t)$	50
3.3-1. Метод решения, основанный на преобразовании Лапласа	50
3.3-2. Метод, основанный на решении вспомогательного уравнения	51
3.3-3. Сведение к обыкновенным дифференциальным уравнениям	52
3.3-4. Приведение к уравнению Винера–Хопфа второго рода	53
3.3-5. Метод дробного интегрирования для уравнения Абеля	53
3.3-6. Системы интегральных уравнений Вольтерра	54

3.4. Операторные методы решения линейных интегральных уравнений	55
3.4-1. Использование решения «укороченного» уравнения	55
3.4-2. Использование вспомогательного уравнения второго рода	56
3.4-3. Метод решения «квадратных» операторных уравнений	57
3.4-4. Решение операторных уравнений полиномиального вида	58
3.4-5. Некоторые обобщения	59
3.5. Построение решений уравнений со специальной правой частью	60
3.5-1. Общая схема	60
3.5-2. Порождающая функция экспоненциального вида	60
3.5-3. Порождающая функция степенного вида	62
3.5-4. Порождающая функция, содержащая синусы или косинусы	63
3.6. Метод модельных решений	64
3.6-1. Предварительные замечания	64
3.6-2. Описание метода	65
3.6-3. Модельное решение для экспоненциальной правой части	65
3.6-4. Модельное решение для степенной правой части	67
3.6-5. Модельное решение для синусоидальной правой части	67
3.6-6. Модельное решение для косинусоидальной правой части	68
3.6-7. Некоторые обобщения	68
3.7. Метод дифференцирования интегральных уравнений	69
3.7-1. Ядро содержит сумму экспонент	69
3.7-2. Ядро содержит сумму гиперболических функций	70
3.7-3. Ядро содержит сумму тригонометрических функций	70
3.7-4. Ядро содержит комбинации различных функций	71
3.8. Сведение уравнений Вольтерра второго рода к уравнениям Вольтерра первого рода	72
3.8-1. Первый способ	72
3.8-2. Второй способ	72
3.9. Метод последовательных приближений	72
3.9-1. Общая схема	72
3.9-2. Формула для резольвенты	73
3.10. Метод квадратур	74
3.10-1. Общая схема метода	74
3.10-2. Применение формулы трапеций	75
3.10-3. Случай вырожденного ядра	75
3.11. Уравнения с бесконечным пределом интегрирования	75
3.11-1. Случай переменного нижнего предела интегрирования	76
3.11-2. Приведение к уравнению Винера–Хопфа второго рода	77
4. Методы решения линейных уравнений вида $\int_a^b K(x, t)y(t) dt = f(x)$	78
4.1. Предварительные замечания	78
4.1-1. Интегральные уравнения Фредгольма первого рода	78
4.1-2. Интегральные уравнения первого рода со слабой особенностью	78
4.1-3. Интегральные уравнения типа свертки	79
4.1-4. Парные интегральные уравнения первого рода	80

4.2. Метод Крейна	80
4.2-1. Основное и вспомогательное уравнения	80
4.2-2. Решение основного уравнения	81
4.3. Метод интегральных преобразований	81
4.3-1. Уравнение с разностным ядром на всей оси	82
4.3-2. Уравнения с ядром $K(x, t) = K(x/t)$ на полуоси	82
4.3-3. Уравнение с ядром $K(x, t) = K(xt)$ и его обобщения	82
4.4. Задача Римана для действительной оси	83
4.4-1. Связь интеграла Фурье с интегралом типа Коши	83
4.4-2. Односторонние интегралы Фурье	84
4.4-3. Теорема об аналитическом продолжении и теорема Лиувилля	86
4.4-4. Краевая задача Римана	87
4.4-5. Задача Римана с рациональными коэффициентами	92
4.4-6. Исключительные случаи. Однородная задача	93
4.4-7. Исключительные случаи. Неоднородная задача	95
4.5. Метод Карлемана для уравнений типа свертки первого рода	98
4.5-1. Уравнение Винера–Хопфа первого рода	98
4.5-2. Интегральные уравнения с двумя ядрами первого рода	99
4.6. Парные интегральные уравнения первого рода	101
4.6-1. Метод Карлемана для уравнения с разностными ядрами	101
4.6-2. Точные решения некоторых парных уравнений первого рода	103
4.6-3. Приведение парных уравнений к уравнению Фредгольма	104
4.7. Асимптотические методы решения уравнений с логарифмической особенностью	108
4.7-1. Предварительные замечания	108
4.7-2. Решение при больших значениях характерного параметра	108
4.7-3. Решение при малых значениях характерного параметра	109
4.7-4. Интегральные уравнения теории упругости	110
4.8. Методы регуляризации	111
4.8-1. Метод регуляризации Лаврентьева	111
4.8-2. Метод регуляризации Тихонова	112
5. Методы решения линейных уравнений вида	
$y(x) - \int_a^b K(x, t)y(t) dt = f(x)$	113
5.1. Предварительные замечания	113
5.1-1. Уравнения Фредгольма и уравнения со слабой особенностью	113
5.1-2. Структура решений	114
5.1-3. Интегральные уравнения типа свертки второго рода	114
5.1-4. Парные интегральные уравнения второго рода	114
5.2. Уравнения Фредгольма второго рода с вырожденным ядром	115
5.2-1. Простейшее вырожденное ядро	115
5.2-2. Вырожденное ядро в общем случае	116
5.3. Решение в виде ряда по степеням параметра. Метод последовательных приближений	118
5.3-1. Итерированные ядра	118
5.3-2. Метод последовательных приближений	119

5.3-3. Построение резольвенты	119
5.3-4. Ортогональные ядра	121
5.4. Метод определителей Фредгольма	121
5.4-1. Формула для резольвенты	121
5.4-2. Рекуррентные соотношения	122
5.5. Теоремы и альтернатива Фредгольма	123
5.5-1. Теоремы Фредгольма	123
5.5-2. Альтернатива Фредгольма	124
5.6. Интегральные уравнения Фредгольма второго рода с симметричными ядрами	124
5.6-1. Характеристические числа и собственные функции	124
5.6-2. Билинейный ряд	125
5.6-3. Теорема Гильберта–Шмидта	126
5.6-4. Билинейные ряды итерированных ядер	127
5.6-5. Решение неоднородного уравнения	127
5.6-6. Альтернатива Фредгольма для симметричных уравнений	129
5.6-7. Резольвента симметричного ядра	129
5.6-8. Экстремальные свойства характеристических чисел	129
5.6-9. Интегральные уравнения, приводимые к симметричным	130
5.6-10. Кососимметричное интегральное уравнение	130
5.7. Операторный метод решения интегральных уравнений второго рода	131
5.7-1. Простейшая схема	131
5.7-2. Решение уравнений второго рода на полуоси	131
5.8. Метод интегральных преобразований и метод модельных решений	132
5.8-1. Уравнение с разностным ядром на всей оси	132
5.8-2. Уравнение с ядром $K(x, t) = t^{-1}Q(x/t)$ на полуоси	133
5.8-3. Уравнение с ядром $K(x, t) = t^\beta Q(xt)$ на полуоси	134
5.8-4. Метод модельных решений для уравнений на всей оси	135
5.9. Метод Карлемана для интегральных уравнений типа свертки второго рода	136
5.9-1. Уравнение Винера–Хопфа второго рода	136
5.9-2. Интегральное уравнение второго рода с двумя ядрами	140
5.9-3. Уравнения типа свертки с переменным пределом интегрирования	143
5.9-4. Парное уравнение типа свертки второго рода	146
5.10. Метод Винера–Хопфа	147
5.10-1. Некоторые замечания	147
5.10-2. Однородное уравнение Винера–Хопфа второго рода	149
5.10-3. Общая схема метода. Проблема факторизации	152
5.10-4. Неоднородное уравнение Винера–Хопфа второго рода	153
5.10-5. Исключительный случай уравнения Винера–Хопфа второго рода	154
5.11. Метод Крейна для уравнения Винера–Хопфа	155
5.11-1. Некоторые замечания. Проблема факторизации	155
5.11-2. Решение уравнения Винера–Хопфа второго рода	157
5.11-3. Формула Хопфа–Фока	159

5.12. Методы решения уравнений с разностным ядром на конечном отрезке	159
5.12-1. Метод Крейна	159
5.12-2. Ядра с рациональными преобразованиями Фурье	161
5.12-3. Сведение к обыкновенным дифференциальным уравнениям	162
5.13. Метод замены ядра вырожденным	163
5.13-1. Аппроксимация ядра	163
5.13-2. Приближенное решение	164
5.14. Метод Бейтмена	165
5.14-1. Общая схема метода	165
5.14-2. Некоторые частные случаи	166
5.15. Метод коллокации	168
5.15-1. Общие замечания	168
5.15-2. Приближенное решение	169
5.15-3. Собственные функции уравнения	170
5.16. Метод наименьших квадратов	170
5.16-1. Описание метода	170
5.16-2. Построение собственных функций	171
5.17. Метод Бубнова–Галеркина	172
5.17-1. Описание метода	172
5.17-2. Характеристические числа уравнения	173
5.18. Метод квадратур	174
5.18-1. Общая схема для уравнений Фредгольма второго рода	174
5.18-2. Построение собственных функций	175
5.18-3. Особенности применения квадратурных формул	175
5.19. Системы интегральных уравнений Фредгольма второго рода	177
5.19-1. Некоторые замечания	177
5.19-2. Метод преобразования системы уравнений в одно уравнение	177
5.20. Метод регуляризации для некоторых уравнений второго рода	178
5.20-1. Основное уравнение и теоремы Нетера	178
5.20-2. Регуляризующие операторы	179
5.20-3. Метод регуляризации	180
6. Методы решения сингулярных интегральных уравнений первого рода	182
6.1. Предварительные замечания	182
6.1-1. Интегральные уравнения первого рода с ядром Коши	182
6.1-2. Интегральные уравнения первого рода с ядром Гильберта	182
6.2. Интеграл типа Коши	183
6.2-1. Определение интеграла типа Коши	183
6.2-2. Условие Гельдера	184
6.2-3. Главное значение сингулярного интеграла	184
6.2-4. Многозначные функции	185
6.2-5. Главное значение сингулярного криволинейного интеграла	187
6.2-6. Формула перестановки Пуанкаре–Бертрана	188

6.3. Краевая задача Римана	189
6.3-1. Теорема об аналитическом продолжении и теорема Лиувилля	189
6.3-2. Интерполяционный полином Эрмита	191
6.3-3. Понятие индекса	191
6.3-4. Постановка задачи Римана	193
6.3-5. Решение однородной задачи	195
6.3-6. Решение неоднородной задачи	196
6.3-7. Задача Римана с рациональными коэффициентами	198
6.3-8. Задача Римана для действительной оси	200
6.3-9. Исключительные случаи задачи Римана	202
6.3-10. Задача Римана для многосвязной области	206
6.3-11. Случаи разрывных коэффициентов и разомкнутых контуров	209
6.3-12. Краевая задача Гильберта	210
6.4. Сингулярные интегральные уравнения первого рода	210
6.4-1. Простейшее уравнение с ядром Коши	210
6.4-2. Уравнение с ядром Коши на действительной оси	211
6.4-3. Уравнение первого рода на конечном отрезке	211
6.4-4. Общее уравнение первого рода с ядром Коши	212
6.4-5. Уравнения первого рода с ядром Гильберта	213
6.5. Метод Мультоппа–Каландия	214
6.5-1. Решение, не ограниченное на концах отрезка	215
6.5-2. Решение, ограниченное на одном конце отрезка	216
6.5-3. Решение, ограниченное на обоих концах отрезка	217
7. Методы решения полных сингулярных интегральных уравнений	218
7.1. Некоторые замечания	218
7.1-1. Интегральные уравнения с ядром Коши	218
7.1-2. Интегральные уравнения с ядром Гильберта	219
7.1-3. Об уравнениях Фредгольма второго рода на контуре	220
7.2. Метод Карлемана для характеристических уравнений	222
7.2-1. Характеристическое уравнение с ядром Коши	222
7.2-2. Уравнение, союзное с характеристическим	225
7.2-3. Характеристическое уравнение на действительной оси	226
7.2-4. Исключительный случай характеристического уравнения	227
7.2-5. Характеристическое уравнение с ядром Гильберта	229
7.2-6. Уравнение Трикоми	230
7.3. Полные сингулярные интегральные уравнения, разрешаемые в замкнутой форме	230
7.3-1. Замкнутое решение при постоянных коэффициентах	231
7.3-2. Замкнутое решение в общем случае	232
7.4. Метод регуляризации для полных сингулярных интегральных уравнений ..	233
7.4-1. Некоторые свойства сингулярных операторов	233
7.4-2. Регуляризующий оператор	235
7.4-3. Способы регуляризации слева и справа	236
7.4-4. Проблема равносильной регуляризации	237
7.4-5. Теоремы Нётера	238
7.4-6. Способ регуляризации Карлемана–Векуа	239

7.4-7. Регуляризация в исключительных случаях	240
7.4-8. Полное уравнение с ядром Гильберта	241
8. Методы решения нелинейных интегральных уравнений	244
8.1. Некоторые определения и замечания	244
8.1-1. Нелинейные интегральные уравнения Вольтерра	244
8.1-2. Нелинейные уравнения с постоянными пределами интегрирования ..	245
8.2. Нелинейные интегральные уравнения Вольтерра	246
8.2-1. Метод интегральных преобразований	246
8.2-2. Метод дифференцирования интегральных уравнений	247
8.2-3. Метод последовательных приближений	248
8.2-4. Метод Ньютона–Канторовича	250
8.2-5. Метод коллокации	251
8.2-6. Метод квадратур	252
8.3. Уравнения с постоянными пределами интегрирования	253
8.3-1. Нелинейные уравнения с вырожденными ядрами	253
8.3-2. Метод интегральных преобразований	255
8.3-3. Метод дифференцирования интегральных уравнений	256
8.3-4. Метод последовательных приближений	257
8.3-5. Метод Ньютона–Канторовича	258
8.3-6. Метод квадратур	260
8.3-7. Метод регуляризации Тихонова	261
9. Интегральные операторы	262
9.1. Линейные операторы в нормированных пространствах	262
9.1-1. Интегральные уравнения и интегральные операторы	262
9.1-2. Нормированные и евклидовы пространства	263
9.1-3. Линейные операторы в нормированных пространствах	264
9.1-4. Резольвента, спектр и корневые подпространства	265
9.1-5. Компактные линейные операторы и их свойства	266
9.2. Линейные операторы в евклидовых пространствах	268
9.2-1. Самосопряженные операторы	268
9.2-2. Самосопряженные компактные операторы	269
9.3. Интегральные операторы. Условия непрерывности и компактности	271
9.3-1. Условия непрерывности интегральных операторов	271
9.3-2. Условия компактности интегральных операторов	272
9.4. Сингулярные интегральные операторы	274
9.4-1. Сингулярные операторы Гильберта и Коши	274
9.4-2. Пространства BMO и VMO	275
9.4-3. Условия ограниченности и компактности сингулярных операторов ..	276
Приложение 1. Элементарные функции и их свойства	278
1.1. Тригонометрические функции	278
1.2. Гиперболические функции	280
1.3. Обратные тригонометрические функции	282
1.4. Обратные гиперболические функции	284

Приложение 2. Таблицы неопределенных интегралов	285
2.1. Интегралы, содержащие рациональные функции	285
2.2. Интегралы, содержащие иррациональные функции	289
2.3. Интегралы, содержащие показательные функции	291
2.4. Интегралы, содержащие гиперболические функции	291
2.5. Интегралы, содержащие логарифмические функции	294
2.6. Интегралы, содержащие тригонометрические функции	295
2.7. Интегралы, содержащие обратные тригонометрические функции	299
Приложение 3. Таблицы определенных интегралов	300
3.1. Интегралы, содержащие алгебраические функции	300
3.2. Интегралы, содержащие экспоненциальные функции	302
3.3. Интегралы, содержащие гиперболические функции	303
3.4. Интегралы, содержащие логарифмические функции	304
3.5. Интегралы, содержащие тригонометрические функции	304
Приложение 4. Таблицы прямых преобразований Лапласа	307
4.1. Общие формулы	307
4.2. Оригинал содержит степенные функции	309
4.3. Оригинал содержит показательные функции	309
4.4. Оригинал содержит гиперболические функции	310
4.5. Оригинал содержит логарифмические функции	311
4.6. Оригинал содержит тригонометрические функции	312
4.7. Оригинал содержит специальные функции	313
Приложение 5 Таблицы обратных преобразований Лапласа	315
5.1. Общие формулы	315
5.2. Образ содержит рациональные функции	317
5.3. Образ содержит квадратные корни	321
5.4. Образ содержит степени с произвольными показателями	323
5.5. Образ содержит показательные функции	324
5.6. Образ содержит гиперболические функции	325
5.7. Образ содержит логарифмические функции	326
5.8. Образ содержит тригонометрические функции	327
5.9. Образ содержит специальные функции	327
Приложение 6. Таблицы косинус-преобразований Фурье	329
6.1. Общие формулы	329
6.2. Оригинал содержит степенные функции	329
6.3. Оригинал содержит показательные функции	330
6.4. Оригинал содержит гиперболические функции	331
6.5. Оригинал содержит логарифмические функции	331
6.6. Оригинал содержит тригонометрические функции	332
6.7. Оригинал содержит специальные функции	333

Приложение 7. Таблицы синус-преобразований Фурье	335
7.1. Общие формулы	335
7.2. Оригинал содержит степенные функции	335
7.3. Оригинал содержит показательные функции	336
7.4. Оригинал содержит гиперболические функции	337
7.5. Оригинал содержит логарифмические функции	338
7.6. Оригинал содержит тригонометрические функции	338
7.7. Оригинал содержит специальные функции	339
Приложение 8. Таблицы прямых преобразований Меллина	342
8.1. Общие формулы	342
8.2. Оригинал содержит степенные функции	343
8.3. Оригинал содержит показательные функции	343
8.4. Оригинал содержит логарифмические функции	344
8.5. Оригинал содержит тригонометрические функции	344
8.6. Оригинал содержит специальные функции	345
Приложение 9. Таблицы обратных преобразований Меллина	346
9.1. Изображение содержит степенные функции	346
9.2. Изображение содержит показательные и логарифмические функции	347
9.3. Изображение содержит тригонометрические функции	348
9.4. Изображение содержит специальные функции	349
Приложение 10. Специальные функции и их свойства	352
10.1. Некоторые символы и коэффициенты	352
10.2. Интеграл вероятностей и интегральная показательная функция	353
10.3. Интегральный синус и интегральный косинус. Интегралы Френеля	354
10.4. Гамма-функция. Бета-функция	355
10.5. Неполные гамма-функции	357
10.6. Функции Бесселя $J_\nu(x)$ и $Y_\nu(x)$	358
10.7. Модифицированные функции Бесселя $I_\nu(x)$ и $K_\nu(x)$	361
10.8. Вырожденные гипергеометрические функции	362
10.9. Гипергеометрические функции	365
10.10. Функции Лежандра	367
10.11. Ортогональные многочлены	369
Список литературы	372
Предметный указатель	378